Tutorato Analisi I - 05/01/24

Esercizi Vari

Esercizio 1 Studiare la funzione $f(x) = \log(x+1) - \arctan\sqrt{x}$, determinandone insieme di definizione, eventuali asintoti (compresi quelli obliqui), estremi superiore e inferiore (o massimo e minimo), eventuali punti angolosi o di cuspide, punti di massimo o di minimo locali e stabilire il numero di punti di flesso. Tracciare un grafico approssimativo della funzione. Detto D il dominio di f, stabilire se $f: D \to \mathbb{R}$ è iniettiva, surgettiva, bigettiva

Soluzione

1) Determiniamo il dominio D.

- $x+1 > 0$
- $x \geq 0$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \wedge x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

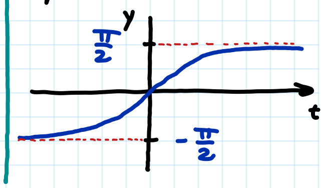
2) Comportamento agli estremi di D.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \log(1) - \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \log(1+x) - \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \arctan(\sqrt{x})}_{\frac{\pi}{2}}$$

Recap

$y = \arctan(t)$



$$= +\infty - \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Questo ci dice che la funzione NON ammette asintoti ORIZZONTALI.

3) Eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\arctan(\sqrt{x})}{x}}_{\to 0} = 0$$

ordini di infinito $\qquad \frac{\pi/2}{+\infty}$

$f(x)$ NON ammette asintoti OBLIQUI.

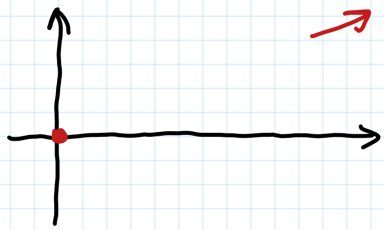
OSS. Poiché $D = [0, +\infty)$, non ha senso domandarsi se $f(x)$ sia pari o dispari.

4) $\inf(f)$, $\sup(f)$.

Iniziamo con $\sup(f)$: poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si ha

$\sup f = +\infty$ (la funzione non ammette massimo)

Studiamo $\inf(f)$



$\sqrt{x}$, $\arctan(\sqrt{x})$
$\log(1+x)$
sono continue
(per $x \geq 0$)

f è somma di funzioni continue in $[0,+\infty)$

$$f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

Per $x>0$, f è anche derivabile (perché somma di funzioni derivabili)

$$f'(x) = (\log(1+x))' - (\arctan(\underbrace{\sqrt{x}}_{b(x)}))'$$

$$= \frac{1}{1+x} - a'(b(x)) \cdot b'(x)$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+b(x)^2} \cdot b'(x)$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

Recap:

$a(x) = \arctan(x)$
$b(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$$a'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$b'(x) = \frac{1}{2} x^{1-1/2} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(a(b(x)))' = a'(b(x))\, b'(x)$$

- $f'(x) = 0 \iff \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\neq 0}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0$

$$\iff 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \iff \sqrt{x} = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{4}.$$

- $f\left(\frac{1}{4}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{4}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right) =$

$$= \log\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

- Segno di f' (studio della monotonia di f)

$$f'(x) > 0 \iff \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) > 0$$

$x > 0$
(f è derivabile)

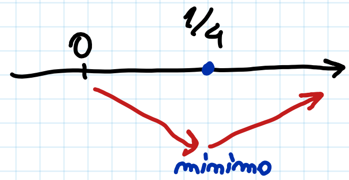
$x \geq 0$
$1 + x > 0$

$$\iff 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$\iff \sqrt{x} > \frac{1}{2}$$

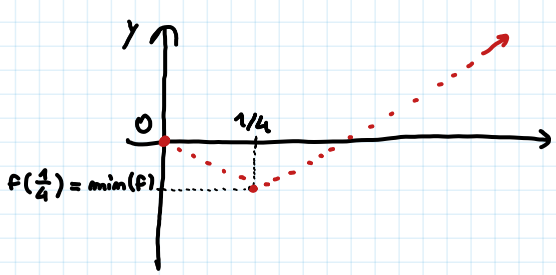
$$\iff x > \frac{1}{4}.$$

$f(x)$ è CRESCENTE per $x > \frac{1}{4}$
DECRESCENTE per $0 < x < \frac{1}{4}$



Il punto $x = \frac{1}{4}$ è un punto di MINIMO per f.

Il minimo $f\left(\frac{1}{4}\right)$ è GLOBALE



Quindi $\inf(f) = \min(f) = f(1/4) = \log\left(\frac{5}{4}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right).$

5) Eventuali punti angolosi o di cuspide.

$f(x)$ è derivabile per $x > 0$. ← non ci sono pti angolosi o di cuspide per $x > 0$

In $x = 0$ $f(x)$ NON è derivabile ($\sqrt{x}$ non è derivabile in $x = 0$)

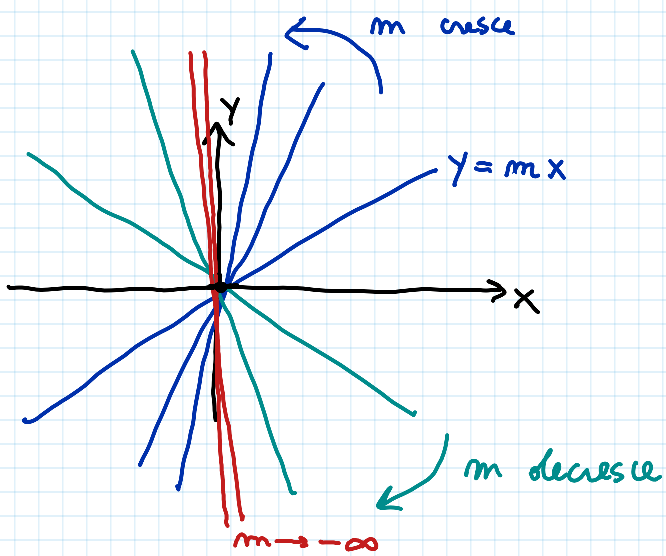
Studiamo il comportamento di $f'(x)$ per $x \to 0^+$:

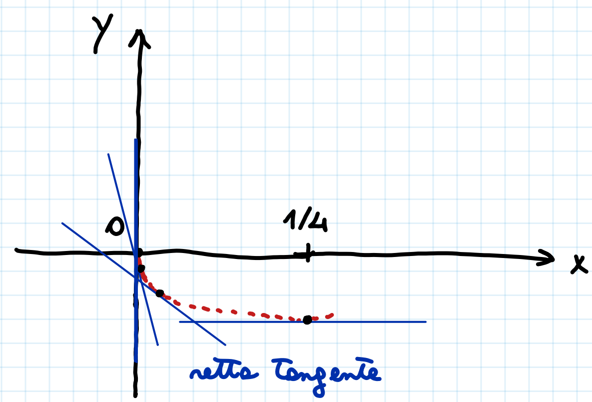
Rapporto incrementale in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{\sqrt{x}}{x}}_{1/\sqrt{x}} = +\infty$$

analogamente per $\arctan(\sqrt{x})$.

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 1} \left(1 - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\to +\infty} \right) = 1 \cdot (1 - \infty) = -\infty .$$





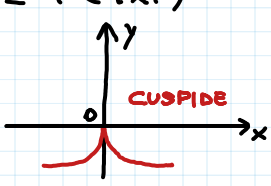
Quindi nel punto $x = 0$ la funzione f non è derivabile, e $x = 0$ NON è né angoloso, né di cuspide. ⊛

⊛ CORREZIONE POST TUTORATO

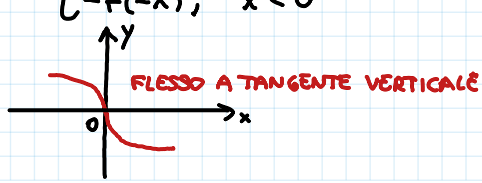
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$ esiste (infinito), ma $f(x)$ non è definita per $x < 0$ (quindi non ha senso $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$).

Ad esempio, estendendo f per $x<0$ possiamo trovare punti di non derivabilità di natura diversa:

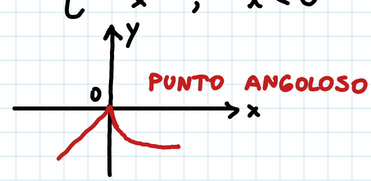
- $y = f(|x|)$



- $y = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$



- $y = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$

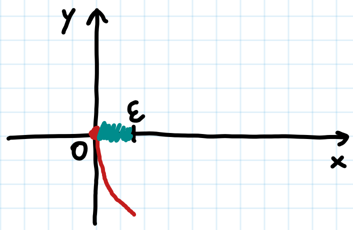


6) Max / min locali e punti di flesso.

Abbiamo già studiato max / min locali

$f(x)$ ammette un MINIMO (GLOBALE) per $x = \frac{1}{4}$.

$f(x)$ ammette un MASSIMO LOCALE per $x = 0$:



cioè intorno destro

In un intorno "piccolo" di $x=0$ (nel dominio D) $[0,\varepsilon)$ la funzione f è minore o uguale a 0

$\Rightarrow$ $x=0$ è un punto di massimo locale per f.

Punti di flesso : Studiare f''

f è derivabile (infinite volte) per $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)'\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{2}x^{-1/2}\right)'$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{1+x}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{x^{-\frac{1}{2}-1}}\right]$$

$$x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$= -\frac{1}{(1+x)^2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^3}}}$$

$$\sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{1+x}\left[-\frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4x\sqrt{x}}\right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2x}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{1+x}\left(-\frac{1}{1+x} + \frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)} + \frac{1}{4x^2}\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x}\cdot\frac{-4x^2 + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}(1+x)}{4(1+x)x^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 2x\sqrt{x} + x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{4x^2(1+x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 + 3x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{4x^2(1+x)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \iff 4x^2 - 3x\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$$

$$\underset{x>0}{\iff} \cancel{\sqrt{x}}\,(4x\sqrt{x} - 3x - 1) = 0$$

$$\iff 4x\sqrt{x} - 3x - 1 = 0$$

$t = \sqrt{x}$

$$\iff 4t^3 - 3t^2 - 1 = 0$$

$t = 1$ risolve $\rightsquigarrow$ Ruffini

oppure $\iff 4t^3 - 4t^2 + t^2 - 1 = 0$

$$\iff 4t^2(t-1) + (t+1)(t-1) = 0$$

$$\iff (t-1)(4t^2 + t + 1) = 0$$

$$\iff t = 1 \ \vee\ \underbrace{4t^2 + t + 1 = 0}_{\text{NON HA SOLUZIONI REALI}}$$

ad esempio perché $t = \sqrt{x} > 0$
$4t^2 + t + 1 > 1$

$$\iff t = 1 \iff x = 1.$$

Cioè $f''(1) = 0$.

• Studio del segno di $f''(x) = \dfrac{-4x^2 + 3x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{\underbrace{4x^2}_{>0}\underbrace{(1+x)^2}_{>0}}$.

$$f''(x) > 0 \iff -4x^2 + 3x\sqrt{x} + \sqrt{x} > 0$$

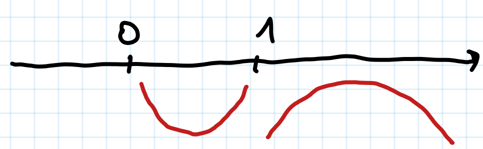
$$\iff \underbrace{-\sqrt{x}}_{<0}\,(4t^3 - 3t^2 - 1) > 0$$

$$\iff 4t^3 - 3t^2 - 1 < 0$$

$$\iff (t-1)\,(\underbrace{4t^2 + t + 1}_{>1}) < 0$$

$$\iff t < 1 \qquad (t = \sqrt{x} > 0)$$

$$\iff 0 < x < 1$$

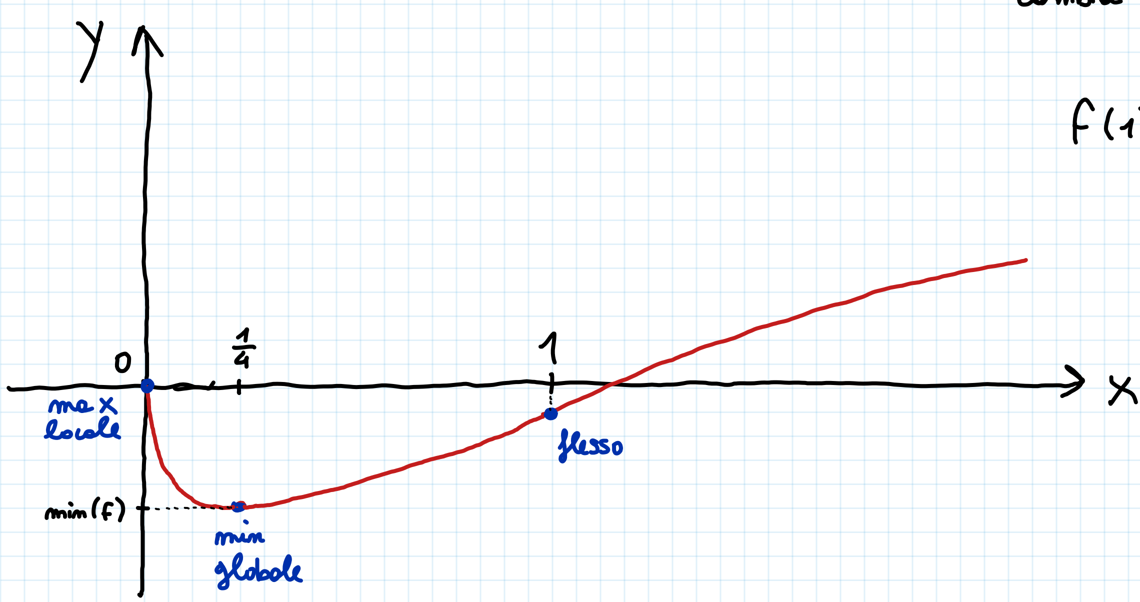


$x = 1$ è un PUNTO DI FLESSO in cui la concavità di f cambia da positiva a negativa.

$f(1) = \log 2 - \arctan 1 =$

$= \log 2 - \dfrac{\pi}{4} \underline{< 0}$

lo si può vedere ad esempio con una calcolatrice, ma in realtà non è importante ...



7) $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

nell'intervallo $(0, +\infty)$ la derivata cambia di segno

f NON è iniettiva (continua ma non monotona in $D = [0, +\infty)$)

f NON è surgettiva (non assume valori più piccoli di $\min(f)$)

Se $f : D \to \mathbb{R}$ è surgettiva, allora si deve avere $\inf(f) = -\infty$ e $\sup(f) = +\infty$

Nel caso di f continua su un INTERVALLO (ad es. $D = \mathbb{R}$) ciò è anche sufficiente:

$$\begin{cases} \inf(f) = -\infty \\ \sup(f) = +\infty \end{cases} + \begin{matrix} f \text{ continua} \\ \text{su un} \\ \text{intervallo} \end{matrix} \Rightarrow f \text{ surgettiva}$$

(segue dal Teorema dei valori intermedi "generalizzato")

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\,dx$$

e per tali valori calcolare l'integrale.

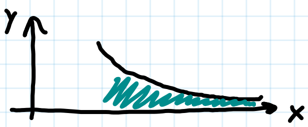
Soluzione

La funzione $\dfrac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}$ è continua su $\mathbb{R}$:

$$x^2-2x+2 = x^2-2x+1+1 = (x-1)^2+1 > 0$$

è integrabile su ogni intervallo $[a,b]$ con $a<b$ reali.

Il problema è a $+\infty$:



Confronto asintotico: $x-1 \sim x$

$$x^2-2x+2 \sim x^2$$

Asintoticamente si ha $\dfrac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha} \sim \dfrac{x}{x^{2\alpha}} = \dfrac{1}{x^{2\alpha-1}}$

Recap

$$\int_M^{+\infty} \frac{1}{x^\beta}\,dx \quad \text{converge} \iff \beta > 1.$$

$M>0$

L'integrale converge se e solo se $2\alpha-1>1$, cioè $\alpha>1$.

Calcoliamo adesso l'integrale per $\alpha>1$.

Determiniamo una primitiva di $\dfrac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}$:

$$\int \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\,dx = \int \frac{x-1}{((x-1)^2+1)^\alpha}\,dx \underset{t=x-1\ (dt=dx)}{=}$$

$$= \int \frac{t}{(t^2+1)^\alpha}\,dt = \frac{1}{2}\int \underbrace{2t}_{\text{è la derivata di}} \big(\overbrace{t^2+1}^{f(t)}\big)^{-\alpha}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int f'(t)\,\big(f(t)\big)^{-\alpha}\,dt \xrightarrow[\substack{\alpha>1\\ -\alpha\neq -1}]{} $$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(f(t))^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(t^2+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{((x-1)^2+1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + c =$$

$$= \frac{1}{2(1-\alpha)}(x^2-2x+2)^{1-\alpha} + c.$$

Recap

$$\int f'(t)\,(f(t))^\beta\,dt = \begin{cases} \dfrac{(f(t))^{\beta+1}}{\beta+1} + c, & \beta\neq -1 \\ \log|f(t)| + c, & \beta = -1 \end{cases}$$

Dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(x^2-2x+2)^\alpha}\,dx = \left.\frac{(x^2-2x+2)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\right|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x+2)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} - \frac{2^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} = 0 - \frac{2^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)} =$$

$$= \frac{2^{-\alpha}}{1-\alpha}.$$

$$\begin{cases} x^2-2x+2 \to +\infty \\ (x^2-2x+2)^{1-\alpha} \to 0 \end{cases}$$

$1-\alpha$ è negativo: $\alpha>1 \Rightarrow 1-\alpha<0$

Esercizio 3 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(e^2 - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right)}_{a_n}.$$

Soluzione

Preliminare: condizione necessaria per la convergenza di $\sum_{n\geq 1} a_n$

è $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Ma sappiamo che

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$ (limite notevole), dunque

la condizione è rispettata e $\sum_{n\geq 1} a_n$ POTREBBE convergere

Solita Tecnica: $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\log(f(x))}$

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

$$a_n = e^2 - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}$$

Una prima stima: $\log\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} + o\left(\frac{2}{n}\right) \rightarrow$ $\log(1+x) = x + o(x)$ per $x\to 0$; $x = \frac{2}{n} \to 0$ per $n\to+\infty$

da cui troviamo:

$$e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^{n\frac{2}{n} + \overbrace{n\, o\left(\frac{2}{n}\right)}^{o(1)}} = e^2 \cdot e^{o(1)}$$

cioè $a_n = e^2 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} \overset{⊛}{=}$

$= e^2\left(1 - e^{o(1)}\right) = e^2 \cdot o(1)$

$e^x = 1 + x + o(x)$
$x = o(1) \to 0$

non ci dice nulla di più del fatto che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

La stima NON è sufficiente! Dobbiamo trovare una stima migliore, ossia uno "scarto" più accurato tra e^2 e $e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)}$

$\rightsquigarrow$ Taylor!

⊛ Attenzione: non è possibile usare le stime asintotiche $e^2 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} \sim e^2 - e^2 = 0$
c'è una differenza e non ha senso dire $a_n \sim 0$.

$$\log\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^2}{2} + o\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^{2 - \frac{2}{n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)\cdot n}_{o\left(\frac{1}{n}\right)}} = e^2 \cdot \underbrace{e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}_{\text{ciò di cui avevamo bisogno}}$$

$$e^2 - e^{n\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = e^2 - e^2\cdot e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} =$$

$$= e^2\left(\underbrace{1 - e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}}_{\text{dobbiamo studiarne l'andamento a } +\infty}\right)$$

$$e^{\overbrace{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}^{\to 0}} = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) + \underbrace{o\left(-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$
per $x \to 0$

da cui: $\quad 1 - e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Mettendo tutto insieme:

$$a_n = e^2 - \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2\left(1 - e^{-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) = e^2\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Quindi asintoticamente $\quad a_n \sim \dfrac{2e^2}{n}$

Ma allora, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{2e^2}{n} = 2e^2 \underbrace{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}}_{\text{serie armonica}} = +\infty$, cioè è DIVERGENTE (a $+\infty$).

Esercizio 4 Studiare il limite della successione

$$a_n = \left(1 + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^{2n}.$$

Soluzione

Chiamiamo $b_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Studiamo b_n separando i casi n PARI e n DISPARI

1) n PARI $\Rightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $n = 2m$

$$\underbrace{b_n}_{=b_{2m}} = \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \sin(m\pi) = 0$$

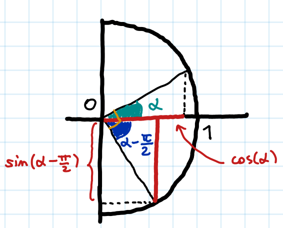
b_{2m} è una successione costante i cui termini sono tutti nulli

2) n DISPARI $\Rightarrow$ $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $n = 2m - 1$

$$\underbrace{b_n}_{=b_{2m-1}} = \sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \sin\left(\frac{2m-1}{2}\pi\right) = \sin\left(m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\cos(m\pi) = \begin{cases} -1, & m \text{ PARI cioè } m = 2k \\ 1, & m \text{ DISPARI cioè } m = 2k-1 \end{cases}$$

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\alpha)$



2.1) $m = 2k \Rightarrow n = 2m - 1 = 4k - 1$

2.2) $m = 2k - 1 \Rightarrow n = 2m - 1 = 2(2k-1) - 1 = 4k - 3$

Quindi, mettendo tutto insieme:

$$b_n = \begin{cases} 0, & n = 2m \\ -1, & n = 4m - 1 \\ 1, & n = 4m - 3 \end{cases}$$

Il tutto può essere letto in termini della DIVISIONE di n per 4: $n = 4q + r$ (quoziente q, resto $r \in \{0,1,2,3\}$)

$r = 0$ oppure 2

$= \underbrace{4(m-1)}_{q} + \underbrace{3}_{r}$ $\quad r = 3$

$= \underbrace{4(m-1)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$ $\quad r = 1$

Possiamo scrivere la successione a_n come :

$$a_n = (1+b_n)^{2n} = \begin{cases} (1+0)^{2n} = 1 & , \quad n = 2m \\ (1+(-1))^{2n} = 0 & , \quad n = 4m-1 \\ (1+1)^{2n} = 2^{2n} & , \quad n = 4m-3 \end{cases}$$

Quindi a_n non ammette limite :

abbiamo 3 sottosuccessioni

a_{2m} , a_{4m-1} , a_{4m-3}

che convergono a valori diversi.

$$\lim_{m\to+\infty} a_{2m} = 1$$

$$\lim_{m\to+\infty} a_{4m-1} = 0$$

$$\lim_{m\to+\infty} a_{4m-3} = +\infty$$

$$\left(a_{\underbrace{4m-3}_{n}} = 2^{2\underbrace{(4m-3)}_{n}} = 4^{4m-3} \to +\infty \right)$$